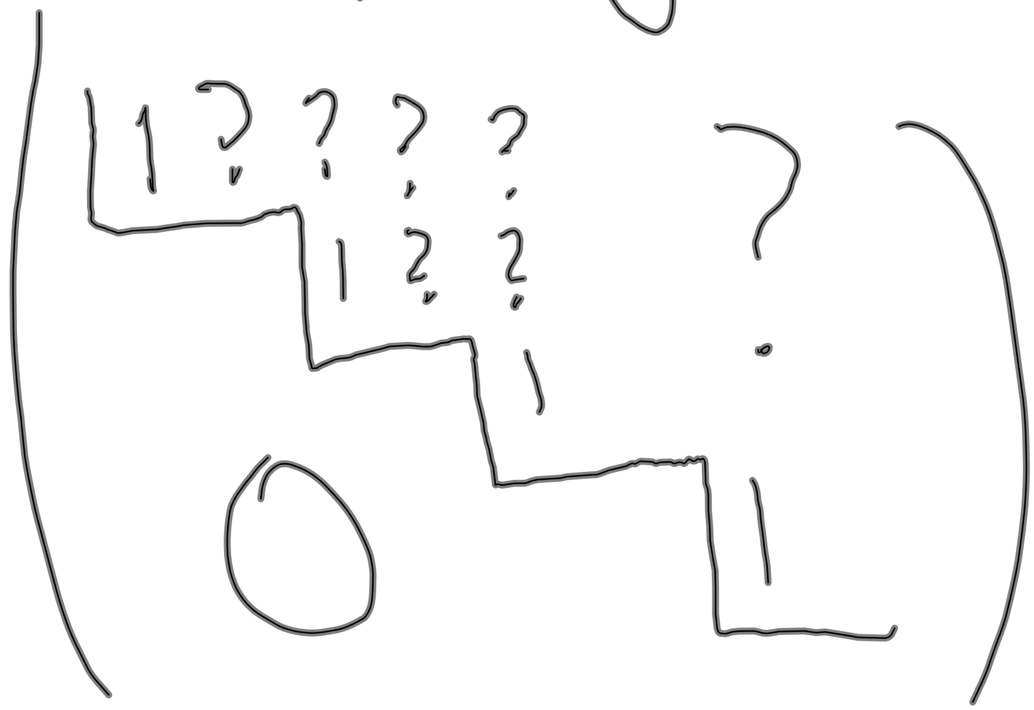
Gausselimination

$\rightsquigarrow$ trappstegsform



nov 12-09:57

Gauss-Jordan-elimination

Gå vidare och eliminera ovanför de ledande ettorna.

nov 12-09:58

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ -3 \quad -4 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 1 & 0 & -22 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -1 \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

nov 12-09:58

Lättare att läsa av lösningen

$$\begin{cases} x_1 = -8+3x_2 = -8+3t \\ x_2 = t \\ x_3 = -14 \\ x_4 = 5 \end{cases}$$

nov 12-09:58

För alla variabler
som inte har
ledande etta
inför vi parameter.
(de är fria variabler)

nov 12-09:58

Större exempel

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 5 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -7 \end{array}\right)$$

(Om vi inte har en etta utan ett tal a multiplicera vi raden med $\frac{1}{a}$)

nov 12-09:58

Tre fria variabler:

x_2, x_4 och x_5

Inför tre parametrar

$x_2 = r$, $x_4 = s$, $x_5 = t$

$$\begin{cases} x_1 = -10 - 2r - 4s + t \\ x_3 = 9 + 3s - 5t \\ x_6 = 8 \\ x_7 = -7 \end{cases}$$

nov 12-09:58

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

nov 12-09:58

Ekvationssystem

$$A\bar{x} = \bar{b}$$

$$T(\bar{x}) = \bar{b}$$

nov 12-09:58

Linjär avbildning

Funktion (avb.)

T från $\mathbb{R}^n$

till något $\mathbb{R}^m$

så att

- $T(\bar{u}+\bar{v}) = T(\bar{u}) + T(\bar{v})$
- $T(a\bar{u}) = aT(\bar{u})$

nov 12-10:28

Exempel

$$\mathrm{Proj}_{\bar{v}}\bar{u} = T(\bar{u})$$

$$\bar{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad |\bar{v}|^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$$

$$\frac{1}{|\bar{v}|^2}\bar{v}\,\bar{v}^t = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}(1\ 2\ 3)$$

$$= \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

nov 12-10:32

Ta en vektor

$\bar{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ och

kolla om det finns

$\bar{u}$ så att

$T(\bar{u}) = \bar{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

nov 12-10:34

Lös ekvationssystem

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{14} & \frac{2}{14} & \frac{3}{14} \\ \frac{2}{14} & \frac{4}{14} & \frac{6}{14} \\ \frac{3}{14} & \frac{6}{14} & \frac{9}{14} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

nov 12-10:36

Totalmatris

$$\begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 28 \\ 2 & 4 & 6 & 28 \\ 3 & 6 & 9 & 14 \end{array}\right)\end{array} \begin{array}{l} -2 \quad -3 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & -28 \\ 0 & 0 & 0 & -70 \end{array}\right)$$

Inkonsistent!

nov 12-10:37

Prova med $\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 2 & 4 & 6 & 28 \\ 3 & 6 & 9 & 42 \end{array}\right) \begin{matrix} -2 & -3 \end{matrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

nov 12-10:42

9

Inför parametrar s och t för de fria variablerna y och z

$$\begin{cases} y = s \\ z = t \end{cases}$$

Lös ut x!

$$x = 14 - 2s - 3t$$

nov 12-10:44

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Plan vinkelrätt mot $(1,2,3)^t$ och som innehåller $(1,2,3)$

nov 12-10:45

Flera högerled

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 28 & 14 \\ 2 & 4 & 6 & 28 & 28 \\ 3 & 6 & 9 & 14 & 42 \end{array}\right) \quad (-2)\ (-3)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 28 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & -28 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -70 & 0 \end{array}\right)$$

fungerar ej Ok!

nov 12-11:06

Radoperationer

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad -4$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -10 \end{pmatrix}$$

ger en kopia av andra raden

ger -4 ggr första raden

nov 12-11:08

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}\begin{matrix} -2 \\ \checkmark \\ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

nov 12-11:12

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

nov 12-11:14

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

nov 12-11:15

Vi kan spara resultatet av radoperationerna i ett högerled

$$\left(A \,\middle|\, I\right)$$

nov 12-11:18

Varje radoperation är multiplikation till vänster med en elementär matris

$$\left(E_1 A \,\middle|\, E_1 I\right)$$

$$= \left(E_1 A \,\middle|\, E_1\right)$$

nov 12-11:19

Fortsätt med nästa radoperation – elementär matris E_2

$$\left(E_2 E_1 A \;\middle|\; E_2 E_1 \right)$$

$$\vdots$$

$$\left(E_N E_{N-1} \cdots E_1 A \;\middle|\; E_N E_{N-1} \cdots E_1 \right)$$

nov 12-11:20

Testa med

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) -4 \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -4 & 1 \end{array}\right) \boxed{\cdot \frac{1}{-5}}$$

nov 12-11:21

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right)$$

nov 12-11:25

Vi har fått

$$E_3E_2E_1A = I$$

$$E_3E_2E_1 = \begin{pmatrix} -3/5 & 2/5 \\ 4/5 & -1/5 \end{pmatrix}$$

Alltså

$$\begin{pmatrix} -3/5 & 2/5 \\ 4/5 & -1/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = I$$

nov 12-11:28

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{5}\cdot 1+\frac{2}{5}\cdot 4 & -\frac{3}{5}\cdot 2+\frac{2}{5}\cdot 3 \\ \frac{4}{5}\cdot 1-\frac{1}{5}\cdot 4 & \frac{4}{5}\cdot 2-\frac{1}{5}\cdot 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

nov 12-11:29

Vi kan nu

lösa

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 4 & 3 & b \end{array}\right)$$

för alla a och b

utan G.E.

nov 12-11:31

$\rightsquigarrow$ Gauss Jordan leder till

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \end{array} \; E_3E_2E_1\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

nov 12-11:32

Matrisen vi fått kallas

<u>inversen</u> till A,

A^{-1}

nov 12-11:34